

Berechnung der Streuquerschnitte von Kugel und Zylinder unter Anwendung einer modifizierten Watson-Transformation

Von PETER BECKMANN und WALTER FRANZ

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität Münster
(Z. Naturforschg. **12 a**, 533—537 [1957]; eingegangen am 26. März 1957)

Bekanntlich ist der Streuquerschnitt eines großen Objektes angenähert gleich dem zweifachen geometrischen Querschnitt (VAN DE HULST¹); im Falle der Kugel und des Zylinders hat sich gezeigt, daß dieser Ausdruck bis auf Korrekturterme der relativen Größenordnung $(ka)^{-2/3}$ (k = Wellenzahl, a = Radius) richtig ist (siehe etwa DEPPERMAN und FRANZ²). Der Zahlenwert dieser Korrekturglieder wurde erstmalig von RUBINOW und WU³ angegeben; das Verfahren dieser Autoren war dabei nur auf die Berechnung des höchsten Korrekturgliedes zugeschnitten. In der vorliegenden Note soll gezeigt werden, daß durch Anwendung einer modifizierten WATSON-Transformation leicht die gesamte asymptotische Reihe berechnet werden kann, und daß diese nach fallenden Potenzen von $(ka)^{2/3}$ fortschreitet. Zunächst wird die Reihendarstellung des Streuquerschnittes durch Zylinderfunktionen streng umgeformt in zwei rasch konvergente Integrale und eine gute konvergente Residuensumme der WATSONschen Art; bei der Kugel ergibt sich zusätzlich ein vom Kugelradius unabhängiger Term. Der Beitrag der Residuensumme ist asymptotisch zu vernachlässigen; die übrigen Glieder liefern die asymptotische Reihe.

I. Streuquerschnitt des Zylinders

Der Streuquerschnitt σ_z eines Zylinders vom Radius a für eine Welle der Wellenzahl k wird gegeben durch

$$\sigma_z = \frac{4}{k} \operatorname{Re} S \quad (1)$$

mit

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\Omega J_n(\kappa)}{\Omega H_{(1)}^n(\kappa)}. \quad (2)$$

Hierin bedeuten

$$\kappa = ka; \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2 \text{ für } n > 0.$$

Ω ist der Differentialoperator der Randbedingung,

¹ H. C. VAN DE HULST, Physika **15**, 740 [1949].

² K. DEPPERMAN u. W. FRANZ, Ann. Phys., Lpz. **14**, 253 [1954].

und zwar ist $\Omega \equiv 1$ für den schallweichen Zylinder ($\xi \parallel$ Achse) und $\Omega = \partial/\partial \kappa$ für den schallharten Zylinder ($\xi \parallel$ Achse). Nach Anwendung der WATSON-Transformation läßt sich S als komplexes Integral in der Indexebene der Zylinderfunktionen schreiben, dessen Integrationsweg die gesamte positiv reelle Achse in mathematisch positivem Sinne umschließt:

$$S = -i \int_C \frac{e^{i\nu\pi}}{\sin \nu\pi} \frac{\Omega J_\nu(\kappa)}{\Omega H_\nu^{(1)}(\kappa)} d\nu. \quad (3)$$

Da der Integrand in der oberen Halbebene mindestens exponentiell verschwindet, läßt sich der

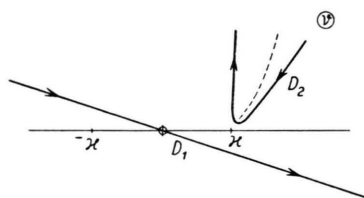


Abb. 1. Integrationsweg für die WATSON-Transformation.

Weg C in die beiden Wege D_1 und D_2 (vgl. Abb. 1) deformieren: Der Weg D_1 verläuft symmetrisch zum Nullpunkt von $-\infty e^{-i\gamma}$ nach $+\infty e^{-i\gamma}$ ($0 < \gamma < \pi/2$), der Weg D_2 umschließt die im ersten Quadranten gelegenen Nullstellen von $\Omega H_\nu^{(1)}(\kappa)$. Die Integrale über die Wege D_1 und D_2 wollen wir im folgenden mit S_1 und S_2 bezeichnen. Da der Weg D_1 symmetrisch zum Nullpunkt verläuft, liefern nur die Teile des Integranden einen Beitrag, welche eine gerade Funktion von ν sind. Wir spalten die BESSEL-Funktion auf in die halbe Summe der beiden HANKEL-Funktionen, benutzen die Umlaufrelationen für den Index der HANKEL-Funktionen und erhalten so

$$S_1 = \frac{1}{2} \int d\nu \left\{ 1 + (1 + e^{-2\pi i \nu}) \frac{\Omega H_\nu^{(2)}(\kappa)}{\Omega H_\nu^{(1)}(\kappa)} \right\}. \quad (4)$$

Das Integral in (4) spalten wir nun auf und fassen teilweise wieder zur BESSEL-Funktion zusammen:

³ S. T. RUBINOW u. T. T. WU, J. Appl. Phys. **27**, 1032 [1956].



$$S_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu + \int_{-\infty \exp(-i\gamma)}^{-\infty} \frac{\Omega J_{-\nu}(\kappa)}{\Omega H_{-\nu}^{(1)}(\kappa)} d\nu + \int_{\kappa}^{\infty \exp(-i\gamma)} \frac{\Omega J_{\nu}(\kappa)}{\Omega H_{\nu}^{(1)}(\kappa)} d\nu + \frac{1}{2} \int_{-\infty \exp(-i\gamma)}^{+\infty} \frac{\Omega H_{\nu}^{(2)}(\kappa)}{\Omega H_{\nu}^{(1)}(\kappa)} d\nu + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty \exp(-i\gamma)} \frac{\Omega H_{-\nu}^{(2)}(\kappa)}{\Omega H_{-\nu}^{(1)}(\kappa)} d\nu. \quad (5)$$

Im zweiten und letzten Integral führen wir $-\nu$ als neue Variable ein und erhalten so jeweils noch einmal das dritte und vierte Integral. Nun verlegen wir den Integrationsweg dieser Integrale so, daß die Integranden von $\nu = \kappa$ aus möglichst rasch abnehmen. Dies geschieht jeweils auf der rückseitigen Verlängerung der Nullstellenkurven von $\Omega J_{\nu}(\kappa)$ bzw. $\Omega H_{\nu}^{(2)}(\kappa)$ über $\nu = \kappa$ hinaus; d. h. als Integrationsweg für das Integral mit dem Zähler $\Omega J_{\nu}(\kappa)$ wählen wir die positiv reelle ν -Achse von $\nu = \kappa$ bis ∞ und für das Integral mit $\Omega H_{\nu}^{(2)}(\kappa)$ die Gerade $\nu = \kappa$ nach $\nu = \kappa + \infty e^{2\pi i/3}$:

$$S_1 = \kappa + 2 \int_{\kappa}^{\infty} \frac{\Omega J_{\nu}(\kappa)}{\Omega H_{\nu}^{(1)}(\kappa)} d\nu - \int_{\kappa}^{\kappa + \infty \exp(2\pi i/3)} \frac{\Omega H_{\nu}^{(2)}(\kappa)}{\Omega H_{\nu}^{(1)}(\kappa)} d\nu. \quad (6)$$

Das Integral über D_2 werten wir aus durch eine Summe über die Residuen an den Polen $\nu_p [\Omega H_{\nu_p}^{(1)}(\kappa) = 0]$ und erhalten so für den Streuquerschnitt des Zylinders

$$\sigma_z = \frac{4}{k} \Re \left\{ \kappa + 2 \int_{\kappa}^{\infty} \frac{\Omega J_{\nu}(\kappa)}{\Omega H_{\nu}^{(1)}(\kappa)} d\nu - \int_{\kappa}^{\kappa + \infty \exp(2\pi i/3)} \frac{\Omega H_{\nu}^{(2)}(\kappa)}{\Omega H_{\nu}^{(1)}(\kappa)} d\nu + 2\pi i \sum_p \frac{\exp(2\pi i \nu_p)}{1 - \exp(2\pi i \nu_p)} \frac{\Omega H_{\nu_p}^{(2)}(\kappa)}{(\partial/\partial \nu) \Omega H_{\nu}^{(1)}(\kappa) |_{\nu=\nu_p}} \right\}. \quad (7)$$

Die Residuensumme ist der Beitrag der Kriechwellen, welche den Zylinder ein- oder mehrfach umlaufen haben. S_1 dagegen rührt von dem Teil der gestreuten Strahlung her, welcher den Zylinder streifend passiert hat*.

II. Streuquerschnitt der Kugel

Die Reihendarstellung für den Streuquerschnitt σ_k einer Kugel vom Radius a lautet

$$\sigma_k = \frac{4\pi}{k^2} \Re T \quad (8)$$

mit

$$T = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \frac{\Psi J_{m+1/2}(\kappa)}{\Psi H_{m+1/2}^{(1)}(\kappa)}; \quad \kappa = ka. \quad (9)$$

Der Differentialoperator der Randbedingung ist hier $\Psi \equiv 1$ für die schallweiche Kugel, $\Psi \equiv \partial/\partial \kappa - 1/2 \kappa$ für die schallharte Kugel. Für die Streuung elektromagnetischer Wellen ist die halbe Summe der Werte von σ für $\Psi \equiv 1$ und $\Psi \equiv \partial/\partial \kappa + 1/2 \kappa$ zu nehmen. Nach Durchführung der WATSON-Transformation – da hier über die Zylinderfunktionen mit halbzahligem Index summiert wird, ist statt $\sin \nu \pi$ der Nenner $\cos \nu \pi$ zu verwenden – erhalten wir ebenfalls zwei Integrale über die Wege D_1 und D_2 . Für diese Integrale benutzen wir die Abkürzungen T_1 und T_2 . Zu T_1 liefert wiederum nur derjenige Teil des Integranden einen Beitrag, welcher eine gerade Funktion von ν ist:

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_{D_1} \nu d\nu \left\{ i \operatorname{tg} \nu \pi + (1 - e^{-2\pi i \nu}) \frac{\Psi H_{\nu}^{(2)}(\kappa)}{\Psi H_{\nu}^{(1)}(\kappa)} \right\}. \quad (10)$$

* Wenn RUBINOW und WU auch aus S_1 durch Verlegung des Integrationsweges Residuen abspalten, so können diese nicht als Kriechwellen angesprochen werden; damit fallen die von RUBINOW und WU geäußerten Zweifel bezüglich der Kriechwellen. Daß im übrigen die einzelnen Residuen-

wellen die Rückseite des Objektes umlaufen, ist nicht – wie RUBINOW und WU glauben – eine Deutung (interpretation), sondern eine einfache Beschreibung des Phänomens.

Addieren und subtrahieren wir im Integranden ν

$$T_1 = + \frac{1}{2} \int_{D_1} \nu d\nu \left\{ i \operatorname{tg} \nu \pi - 1 + 1 + (1 - e^{-2\pi i \nu}) \frac{\Psi H_{\nu}^{(2)}(\kappa)}{\Psi H_{\nu}^{(1)}(\kappa)} \right\},$$

so können wir das Integral wie im Falle des Zylinders aufspalten:

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\kappa} \nu d\nu - \frac{1}{2} \int_{-\kappa}^0 \nu d\nu + \frac{1}{2} \int_0^{\infty \exp(-i\gamma)} \nu d\nu \{i \operatorname{tg} \nu \pi - 1\} + \frac{1}{2} \int_{-\infty \exp(-i\gamma)}^0 \nu d\nu \{i \operatorname{tg} \nu \pi + 1\} \\ + \int_{\kappa}^{\infty \exp(-i\gamma)} \frac{\Psi J_{\nu}(\kappa)}{\Psi H_{\nu}^{(1)}(\kappa)} \nu d\nu - \int_{-\infty \exp(-i\gamma)}^{-\kappa} \frac{\Psi J_{-\nu}(\kappa)}{\Psi H_{-\nu}^{(1)}(\kappa)} \nu d\nu + \frac{1}{2} \int_{-\infty \exp(-i\gamma)}^{\kappa} \frac{\Psi H_{\nu}^{(2)}(\kappa)}{\Psi H_{\nu}^{(1)}(\kappa)} \nu d\nu - \frac{1}{2} \int_{-\kappa}^{+\infty \exp(-i\gamma)} \frac{\Psi H_{-\nu}^{(2)}(\kappa)}{\Psi H_{-\nu}^{(1)}(\kappa)} \nu d\nu. \quad (11)$$

Im zweiten, vierten, sechsten und achten Integral führen wir $-\nu$ als neue Variable ein und erhalten so noch einmal die jeweils vorhergehenden Integrale:

$$T_1 = \frac{\kappa^2}{2} + \int_{\nu}^{-i\infty} \nu \{i \operatorname{tg} \nu \pi - 1\} d\nu + 2 \int_{\kappa}^{\infty} \frac{\Psi J_{\nu}(\kappa)}{\Psi H_{\nu}^{(1)}(\kappa)} \nu d\nu - \int_{\kappa}^{\kappa + \infty \exp(2\pi i/3)} \frac{\Psi H_{\nu}^{(2)}(\kappa)}{\Psi H_{\nu}^{(1)}(\kappa)} \nu d\nu. \quad (12)$$

Das erste Integral läßt sich ausführen und liefert den Wert $1/24$. Das Integral über D_2 werten wir wiederum durch eine Residuensumme aus [$\Psi H_{\nu_q}^{(1)}(\kappa) = 0$] und erhalten so für den gesamten Streuquerschnitt der Kugel

$$\sigma_k = \frac{4\pi}{k^2} \Re \left\{ \frac{\kappa^2}{2} + \frac{1}{24} + 2 \int_{\kappa}^{\infty} \frac{\Psi J_{\nu}(\kappa)}{\Psi H_{\nu}^{(1)}(\kappa)} \nu d\nu - \int_{\kappa}^{\kappa + \infty \exp(2\pi i/3)} \frac{\Psi H_{\nu}^{(2)}(\kappa)}{\Psi H_{\nu}^{(1)}(\kappa)} \nu d\nu \right. \\ \left. - 2\pi i \sum_q \frac{\exp(2\pi i \nu_q)}{1 + \exp(2\pi i \nu_q)} \frac{\Psi H_{\nu_q}^{(2)}(\kappa)}{(\partial/\partial \nu) \Psi H_{\nu}^{(1)}(\kappa)|_{\nu=\nu_q}} \cdot \nu_q \right\}. \quad (13)$$

III. Asymptotische Auswertung der Formeln für die Streuquerschnitte

Da der Hauptbeitrag zu den Integralen in (7) und (13) aus der Umgebung von $\nu = \kappa$ kommt, ersetzt man zweckmäßig die Zylinderfunktionen durch die von FRANZ und GALLE⁴ angegebene asymptotische Darstellung mittels des AIRY-Integrals. Diese lautet unter Verwendung eines Differentialoperators

$$Z_{\nu}(\kappa) \sim \frac{2y}{\pi} \alpha \exp \left\{ -\frac{\kappa}{5!} \frac{\partial^5}{\partial \nu^5} - \frac{\kappa}{7!} \frac{\partial^7}{\partial \nu^7} - \dots \right\} A(\alpha q), \quad (14a)$$

$$\frac{\partial Z_{\nu}(\kappa)}{\partial \kappa} \sim -\operatorname{Sin} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) Z_{\nu}(\kappa). \quad (14b)$$

Hier ist $A(\alpha q)$ das AIRY-Integral: $A(\alpha q) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \exp[-i(\tau^3 - \alpha \tau)]$

$$\text{und} \quad y = \left(\frac{6}{\kappa} \right)^{1/3} q = y(\nu - \kappa), \quad \alpha = \begin{cases} -1 & Z_{\nu}(\kappa) = -2 J_{\nu}(\kappa) \\ e^{-i\pi/3} & \text{für } Z_{\nu}(\kappa) = H_{\nu}^{(1)}(\kappa) \\ e^{i\pi/3} & Z_{\nu}(\kappa) = H_{\nu}^{(2)}(\kappa) \end{cases}.$$

⁴ W. FRANZ u. R. GALLE, Z. Naturforschg. 10 a, 374 [1955].

Die Ausführung der Differentiationen in (14) liefert so unter Benutzung der Differentialgleichung

$$A''(z) + \frac{z}{3} A'(z) = 0$$

semikonvergente Reihen, deren erste Glieder lauten

$$Z_\nu(\kappa) \sim \frac{2y\alpha}{\pi} A(\alpha q) \left\{ 1 - y^2 \frac{q}{45} + y^4 \left(\frac{13q^2}{81 \cdot 140} - \frac{q^5}{243 \cdot 800} \right) - y^6 \left(\frac{1}{8100} + \frac{463q^3}{27 \cdot 81 \cdot 2800} + \frac{283q^6}{81 \cdot 81 \cdot 112\,000} \right) \right. \\ \left. + y^2 \alpha \frac{A'(\alpha q)}{A(\alpha q)} \left[\frac{q^2}{180} + y^2 \left(\frac{1}{420} + \frac{q^3}{27 \cdot 140} \right) - y^4 \left(\frac{19q}{81 \cdot 700} + \frac{13q^4}{27 \cdot 81 \cdot 400} + \frac{q^7}{81 \cdot 81 \cdot 16\,000} \right) \right] + \dots \right\}, \quad (15a)$$

$$\frac{\partial Z_\nu(\kappa)}{\partial \kappa} \sim - \frac{2\alpha^2 y^2}{\pi} A'(\alpha q) \left\{ 1 - y^2 \frac{q}{45} - y^4 \left(\frac{19q^2}{81 \cdot 280} - \frac{q^5}{243 \cdot 800} \right) + y^6 \left(\frac{23}{81 \cdot 1400} + \frac{283q^3}{27 \cdot 81 \cdot 2800} - \frac{61q^6}{81 \cdot 81 \cdot 56\,000} \right) \right. \\ \left. - \alpha^2 y^2 \frac{A(\alpha q)}{A'(\alpha q)} \left[\frac{1}{30} - \frac{q^3}{540} + y^2 \left(\frac{q}{540} - \frac{q^4}{81 \cdot 1120} \right) \right] \right. \\ \left. - y^4 \left(\frac{103q^2}{243 \cdot 2800} + \frac{181q^5}{81 \cdot 81 \cdot 56\,000} - \frac{q^8}{81 \cdot 243 \cdot 16\,000} \right) \right] + \dots \right\}. \quad (15b)$$

Die Berechnung der Integrale in (7) und (13) vereinfacht sich, wenn man noch die Wronski-Determinante des AIRY-Integrals benutzt:

$$e^{-2\pi i/3} A(z) A'(e^{-2\pi i/3} z) - A'(z) A(e^{-2\pi i/3} z) = -e^{i\pi/6} \cdot \pi/6. \quad (16)$$

Die Bestimmung der Streuquerschnitte wird noch dadurch erleichtert, daß die Glieder der Entwicklung der zweiten Integrale in (7) und (13) jeweils das Konjugiert-Komplexe der entsprechenden Entwicklungsglieder der ersten Integrale sind, multipliziert mit einem allerdings von Glied zu Glied wechselnden Phasenfaktor. Da für den Streuquerschnitt nur der Realteil maßgebend ist, kann man die Glieder unter Berücksichtigung des Phasenfaktors jeweils zusammenfassen. Die einzelnen Glieder der Residuenreihen in (7) und (13) lassen sich ebenfalls asymptotisch nach fallenden Potenzen von $\kappa^{2/3}$ entwickeln. Wegen des Faktors $e^{2\pi i\nu}$ ist ihr Beitrag jedoch exponentiell klein und kann asymptotisch vernachlässigt werden.

IV. Numerische Ergebnisse

Für die numerische Rechnung ersetzt man das AIRY-Integral und seine Ableitung durch die modifizierten BESSEL-Funktionen (vgl. MAGNUS und OBERHETTINGER⁵, S. 40). Man erhält so für die ersten Glieder der Entwicklung der Streuquerschnitte:

Zylinder

$$\text{schallweich:} \quad \frac{\sigma_W}{4a} = 1 + \frac{1}{\kappa^{2/3}} \frac{1}{3^{1/3}} \frac{A_1}{2} - \frac{1}{\kappa^{4/3}} \frac{3\sqrt{3}}{10\pi} \frac{1}{4} A_2 + O(\kappa^{-2}). \quad (17a)$$

$$\text{schallhart:} \quad \frac{\sigma_H}{4a} = 1 - \frac{1}{\kappa^{2/3}} \frac{1}{3^{1/3}} \frac{B_1}{2} - \frac{1}{\kappa^{4/3}} \frac{3\sqrt{3}}{10\pi} \left\{ \frac{2}{3} B_2 - \frac{1}{4} B_3 \right\} + O(\kappa^{-2}); \quad (17b)$$

Kugel

$$\text{schallweich:} \quad \frac{\sigma_W}{2\pi a^2} = 1 + \frac{1}{\kappa^{2/3}} \frac{1}{3^{1/3}} A_1 - \frac{2}{\kappa^{4/3}} \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{10\pi} \frac{1}{4} A_2 + \frac{3}{24^{2/3}} A_3 \right\} + O(\kappa^{-2}), \quad (18a)$$

$$\text{schallhart:} \quad \frac{\sigma_H}{2\pi a^2} = 1 - \frac{1}{\kappa^{2/3}} \frac{1}{3^{1/3}} B_1 - \frac{2}{\kappa^{4/3}} \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{10\pi} \left[\frac{7}{3} B_2 - \frac{1}{4} B_3 \right] - \frac{3}{24^{2/3}} B_4 \right\} + O(\kappa^{-2}); \quad (18b)$$

⁵ W. MAGNUS u. F. OBERHETTINGER, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der math. Physik, 2. Aufl., Berlin 1948.

elektromagnetisch: $\sigma_{\text{EMG}} = \frac{1}{2} \{ \sigma_{\text{W}} + \sigma'_{\text{EMG}} \},$

$$\frac{\sigma'_{\text{EMG}}}{2 \pi a^2} = 1 - \frac{1}{\kappa^{2/3}} \frac{1}{3^{1/3}} B_1 + \frac{2}{\kappa^{1/3}} \left\{ \frac{3 \sqrt{3}}{10 \pi} \left[B_2 + \frac{1}{4} B_3 \right] + \frac{3}{24^{2/3}} B_4 \right\} + O(\kappa^{-2}). \quad (18 \text{ c})$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^\infty \frac{dz}{z^{1/3}} \frac{2-B-B^2}{1+B+B^2}, & A_2 &= \int_0^\infty \frac{dz z^{1/3}}{[I_{-1/3}(z)]^2} \frac{B(0,5+B)}{(1+B+B^2)^2}, \\ A_3 &= \int_0^\infty dz z^{1/3} \frac{1+B-2B^2}{1+B+B^2}, & B(z) &= \frac{I_{1/3}(z)}{I_{-1/3}(z)}, \\ B_1 &= \int_0^\infty \frac{dz}{z^{1/3}} \frac{1+D-2D^2}{1+D+D^2}, & B_2 &= \int_0^\infty \frac{dz}{z^{1/3}} \frac{1}{[z^{2/3} I_{-2/3}(z)]^2} \frac{0,5+D}{(1+D+D^2)^2}, \\ B_3 &= \int_0^\infty dz \frac{z^{1/3}}{[I_{-2/3}(z)]^2} \frac{0,5+D}{(1+D+D^2)^2}; & B_4 &= \int_0^\infty dz z^{1/3} \frac{2-D-D^2}{1+D+D^2}, & D(z) &= \frac{I_{2/3}(z)}{I_{-2/3}(z)}. \end{aligned}$$

Nach Ausführung der Integrale erhält man so

Zylinder

$$\frac{\sigma_{\text{W}}}{4a} = 1 + \frac{0,4981}{\kappa^{2/3}} - \frac{0,0112}{\kappa^{4/3}} + O(\kappa^{-2}), \quad (19 \text{ a})$$

$$\frac{\sigma_{\text{H}}}{4a} = 1 - \frac{0,4321}{\kappa^{2/3}} - \frac{0,2137}{\kappa^{4/3}} + O(\kappa^{-2}), \quad (19 \text{ b})$$

Kugel

$$\frac{\sigma_{\text{W}}}{2 \pi a^2} = 1 + \frac{0,9962}{\kappa^{2/3}} - \frac{0,3576}{\kappa^{4/3}} + O(\kappa^{-2}), \quad (20 \text{ a})$$

$$\frac{\sigma_{\text{H}}}{2 \pi a^2} = 1 - \frac{0,8642}{\kappa^{2/3}} - \frac{1,0052}{\kappa^{4/3}} + O(\kappa^{-2}), \quad (20 \text{ b})$$

$$\frac{\sigma_{\text{EMG}}}{2 \pi a^2} = 1 + \frac{0,0660}{\kappa^{2/3}} + \frac{0,4853}{\kappa^{4/3}} + O(\kappa^{-2}). \quad (20 \text{ c})$$

Die Zahlenwerte der ersten Korrekturglieder stimmen genau mit den Werten von RUBINOW und WU³ überein.

Anm. b. d. Korr.: Während des Druckes wurde uns eine Arbeit von WU (Phys. Rev. **104**, 1201 [1956]) bekannt, in welcher mehrere Glieder der asymptotischen Entwicklungen nach einem anderen Verfahren berechnet werden. Im Endergebnis differieren die Koeffizienten der 2. Korrekturglieder für σ_{H} und σ_{EMG} der Kugel von den unserigen, offenbar wegen eines bei WU fehlenden Faktors $1/2$ in dem Glied, welches unserem B_4 entspricht. Eine direkte Kontrolle dessen ist uns nicht möglich, da die sehr komplizierte Wusche Rechnung in der Publikation nur angedeutet ist. Auch haben wir bis jetzt von Dr. WU keine Bestätigung für den von uns vermuteten Fehler erhalten.